Chapitre 1

Les ensembles de nombres

1.1 Les ensembles

Un **ensemble** est une collection d'objets appelés **éléments**.

On peut définir un ensemble

- ou bien **par énumération** ; les éléments sont alors placés entre accolades et séparés par des virgules. Par exemple, $\{a, b, c, d, e, f\}$ est un ensemble.

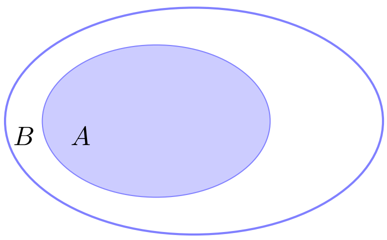
- ou bien **en compréhension** ; l'ensemble est définis par une propriétés caractérisant les éléments. Par exemple, $\{n; n \in \mathbb{N}, n \geqslant 6\}$ est un ensemble.

Remarque
On note $\varnothing$ l'ensemble vide ; c'est un ensemble qui ne contient aucun élément.

1.1.1 Inclusion

Définition

Un ensemble A est **inclus** (ou **contenu**) dans un ensemble B quand tous les éléments de l'ensemble A appartiennent à l'ensemble B.



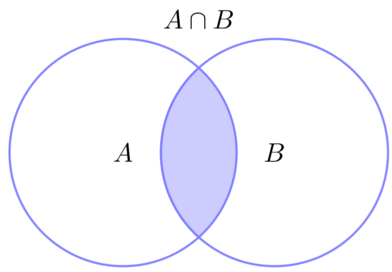
Notation
On note $A \subset B$

Exemple
$\{a, b\} \subset \{a, b, c, d\}$

1.1.2 Intersection

Définition

L'**intersection** des deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments communs à A et à B.



Notation
On note $A \cap B$

Exemple
$\{a, b, c, d\} \cap \{c, d, e, f\} = \{c, d\}$

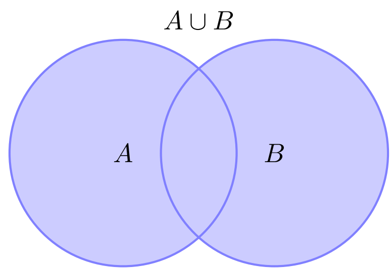
Définition

Deux ensembles sont **disjoints** si leur intersection est égale à l'ensemble vide.

1.1.3 Réunion

Définition

La **réunion** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'ensemble A ou à l'ensemble B.



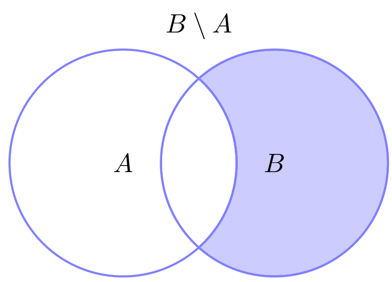
Notation
On note $A \cup B$

Exemple
$\{a, b, c, d\} \cup \{c, d, e, f\} = \{a, b, c, d, e, f\}$

1.1.4 Complémentaire

Définition

Le **complémentaire** de A dans B est l'ensemble des éléments de B qui n'appartiennent pas à A.



Notation
On note $B \setminus A$

Exemple
$\{a, b, c, d\} \setminus \{a, b\} = \{c, d\}$

1.2 Les entiers naturels

Définition

Les **entiers naturels** sont les nombres 0,1, 2, 3,...

Notations

- $\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels
- $\mathbb{N}^*$: l'ensemble des entiers naturels non nuls

1.3 Les entiers relatifs

1.3.1 Définition

Définition

L'ensemble des **entiers relatifs** est la réunion de l'ensemble des entiers naturels et de l'ensemble constitué de leurs opposés.

Notations

- $\mathbb{Z}$: l'ensemble des entiers relatifs
- $\mathbb{Z}^*$: l'ensemble des entiers relatifs non nul
- $\mathbb{Z}^+$: l'ensemble des entiers positifs
- $\mathbb{Z}^{*+}$: l'ensemble des entiers strictement positifs
- $\mathbb{Z}^-$: l'ensemble des entiers négatifs
- $\mathbb{Z}^{*-}$: l'ensemble des entiers strictement négatifs

Propriété

Tout entier naturel est un entier relatif autrement dit $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

1.3.2 Multiples et diviseurs

Définition

Soient a et b deux entiers.
a est un **multiple** de b ou b est un **diviseur** de a s'il existe un entier k tel que $a = k \times b$.

Exemple

12 est un multiple de 3 et de 4. 3 et 4 sont des diviseurs de 12.

Contre-exemple

12 n'est pas un multiple de 5 car $2 \times 5 = 10$ et $3 \times 5 = 15$ et il n'existe pas d'entier k entre 2 et 3 tel que $k \times 5 = 12$.

Propriété

Soit a un entier.
La somme de deux multiples de a est un multiple de a.

Démonstration

Soit $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ les deux multiples de a.

Il existe un entier k tel que $b = k \times a$ et un entier k' tel que $c = k' \times a$.

D'où :

$b + c = k \times a + k' \times a$

$b + c = (k + k') \times a$

$b + c = K \times a$ avec $K = k + k'$ et K entier en tant que somme de deux entiers.

Donc $b + c$ est un multiple de a.

1.3.3 Nombres pairs et nombres impairs

Définition

- Un entier **pair** est un entier multiple de 2.
- Un entier est **impair** s'il n'est pas pair.

Remarques

- Un entier pair s'écrit sous la forme $2k$ où k est un entier.
- Un entier impair s'écrit sous la forme $2k + 1$ où k est un entier.

Propriété

Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration

Rappel : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Soit a un nombre impair. Il existe un entier k tel que $a = 2k + 1$.

On a :

$a^2 = (2k+1)^2$

$a^2 = (2k)^2 + 2 \times 2k \times 1 + 1^2$

$a^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$a^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

$a^2 = 2K + 1$ avec $K = 2k^2 + 2k$ et $K \in \mathbb{Z}$

donc a^2 est un nombre impair.

Algorithme 1
Soit a et b deux entiers tels que $a \leqslant b$. Déterminer le plus grand multiple m de a tel que $m \leqslant b$.

Principe
On va tester tous les multiples de a jusqu'à dépasser b. Le plus grand multiple m sera alors l'avant dernier multiple testé.

Entrées : $a, b \in \mathbb{Z}$
Sorties : $m \in \mathbb{Z}$

$m \leftarrow a$
tant que $m \leqslant b$ **faire**
    $m \leftarrow m + a$
fin

retourner $m - a$

```python
def PlusGrandMultiple(a,b):
    m = a
    while m <= b:
        m = m+a
    return m-a
```

Algorithme 2
Soient a et b deux entiers naturel tels que $a \leqslant b$. Déterminer si b est un multiple de a.

Principe
On va tester tous les multiples de a jusqu'à dépasser b. Si l'avant dernier multiple testé est égal à b, alors b est multiple de a sinon il ne l'est pas.

Entrées : $a, b \in \mathbb{Z}$
Sorties : un booléen obtenu par le test $m - a = b$

$m \leftarrow a$
tant que $m \leqslant b$ **faire**
    $m \leftarrow m + a$
fin

retourner $m - a = b$

```python
def EstMultipleDe(a,b):
    m = a
    while m <= b:
        m = m+a
    return m-a == b
```

1.3.4 Nombres premiers

Définition

Un nombre **premier** est un entier naturel qui a exactement deux diviseurs distincts.

Remarques

- 0 n'est pas un nombre premier car tout entier naturel divise 0 ($0 = 0 \times n$ où $n \in \mathbb{N}$ est quelconque)
- 1 n'est pas un nombre premier car il est son seul diviseur.

Algorithme 3
Soit n un entier naturel. Déterminer si n est un nombre premier.

Principe
On va compter les diviseurs d de n. Pour cela, on va calculer le reste de la division euclidienne de n par d. Si ce reste est nul, alors d est un diviseur de n autrement dit le nombre de diviseur de n augmente de 1. Si le nombre de diviseurs final est égale à 2 alors n est premier.

Entrées : $n \in \mathbb{N}$
Sorties : un booléen obtenu par le test $c = 2$

$c \leftarrow 0$
pour $i = 1$ **à** n **faire**
  $r \leftarrow$ reste de la division entière de n par i
  si $r = 0$ **alors**
    $c \leftarrow c + 1$
  fin
fin

retourner $c = 2$

```python
def EstPremier(n):
    c = 0
    for i in range(1,n+1):
        r = n % i
        if r == 0:
            c = c + 1
    return c==2
```

Propriété

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 est soit premier, soit le produit de nombres premiers. Dans le second cas, cette décomposition est unique.

Méthode
Pour décomposer un nombre en produit de nombre premier, on divise successivement par les nombres de la liste ordonnée des nombres premiers.

Exemple

17640	2
8820	2
4410	2
2205	3
735	3
245	5
49	7
7	7
1	

d'où la décomposition unique en produit de nombres premiers $17640 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^2$

1.4 Les nombres décimaux

Définition

L'ensemble des **nombres décimaux**, noté $\mathbb{D}$, est l'ensemble des nombres de la forme $\frac{a}{10^p}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$.

Exemple

$\frac{1}{4}$ est un nombre décimal car $\frac{1}{4} = \frac{25}{10^2}$.

Propriété

Tout entier relatif est un nombre décimal autrement dit $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors $n = \frac{n}{10^0}$. Donc $n \in \mathbb{D}$.

Propriété

Il existe des nombres qui ne sont pas décimaux.

Démonstration

Montrons que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

On raisonne par l'absurde. Supposons que $\frac{1}{3}$ soit un nombre décimal.

Alors il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^p}$ autrement dit tels que $3a = 10^p$.

Cela entraîne que 10^p est divisible par 3 ce qui est absurde puisque la somme de ses chiffres est toujours égale à 1.

Donc $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

1.5 Les nombres rationnels

Définition

L'ensemble des **nombres rationnels**, noté $\mathbb{Q}$, est l'ensemble des nombres de la forme $\dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

Exemple
$\dfrac{1}{3}$ est un nombre rationnel (qui n'est pas décimal).

Propriété

Tout nombre décimal est un nombre rationnel autrement dit $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Démonstration

Un nombre décimal a s'écrit sous la forme $\dfrac{a}{10^p}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$. Comme $10^p \in \mathbb{N}^*$, alors $a \in \mathbb{N}$.

Propriété

Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels.

Démonstration

Montrons que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel.

Alors, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premier entre eux tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.

En élevant au carré, on a $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$ soit $p^2 = 2q^2$ (1).

Ainsi, p^2 est un nombre pair, et par suite p est aussi un nombre pair (en effet, si p était impair, alors p^2 serait impair).

Puisque p est pair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$.

D'après (1), on en déduit alors que $p^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2q^2$ soit $q^2 = 2k^2$.

Ceci entraîne que q^2, puis q sont pairs. Ceci contredit le fait que p et q sont premiers entre eux.

Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

1.6 Les nombres réels

1.6.1 Définition

Définition

L'ensemble de **nombres réels**, noté $\mathbb{R}$, est l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée appelé droite numérique.

Définition

Un **nombre irrationnel** est un nombre qui n'est pas rationnel.

Propriété - Encadrement de $x \in \mathbb{R}$ à 10^{-n} près

Pour tout nombre réel x et pour tout entier naturel n , il existe un nombre décimal d tel que :

$$d \leqslant x < d + 10^{-n}$$

1.6.2 Intervalles

Définition

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

1. L'intervalle $[a;b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$.
2. L'intervalle $[a;b[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leqslant x < b$.
3. L'intervalle $]a;b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x \leqslant b$.
4. L'intervalle $]a;b[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x < b$.

Définition

1. a et b sont appelés les **bornes** (ou **extrémités**) de l'intervalle.
2. Un intervalle est **ouvert à gauche** (respectivement **à droite**) si la borne de gauche (respectivement de droite) n'appartient pas à l'intervalle.
3. Un intervalle est **fermé à gauche** (respectivement **à droite**) si la borne de gauche (respectivement de droite) appartient à l'intervalle.
4. Un intervalle est **ouvert** (respectivement **fermé**) s'il est ouvert (respectivement fermé) à droite et à gauche.
5. L'**amplitude** de l'intervalle $[a;b]$ est le nombre réel $b - a$.
6. Le **centre** de l'intervalle $[a;b]$ est l'abscisse du milieu des points d'abscisses a et b soit $\dfrac{a+b}{2}$

Définition

Soit a un nombre réel.

1. L'intervalle $[a; +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \geqslant a$.
2. L'intervalle $]a; +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x > a$.
3. L'intervalle $]-\infty; a]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \leqslant a$.
4. L'intervalle $]-\infty; a[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x < a$.

1.6.3 Valeur absolue d'un réel

Définition

La **distance de deux réels** a **et** b, notée $d(a; b)$, est la distance des points A et B d'abscisses respectives a et b sur la droite numérique.

Propriété

Soit a et b deux réels.
Alors $d(a, b) = \begin{cases} b - a & \text{si } b \geqslant a \\ a - b & \text{si } b \leqslant a \end{cases}$

Définition

La **valeur absolue** d'un réel x, notée $|x|$, est la distance de ce réel à 0 autrement dit $|x| = d(0; x)$.

Propriété

Soit x un nombre réel.

1. $|x| \geqslant 0$
2. $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$
3. $|x| = |-x|$
4. $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$

Propriété

Soit a un nombre réel et r un nombre réel positif.
L'intervalle $[a - r; a + r]$ est l'ensemble des réels x tels que $|x - a| \leqslant r$.

Démonstration

$$\begin{aligned}
x \in [a-r; a+r] &\Leftrightarrow a - r \leqslant x \leqslant a + r \\
&\Leftrightarrow -r \leqslant x - a \leqslant +r \\
&\Leftrightarrow -r \leqslant x - a \leqslant 0 \text{ ou } 0 \leqslant x - a \leqslant +r \\
&\Leftrightarrow 0 \leqslant a - x \leqslant +r \text{ ou } 0 \leqslant x - a \leqslant +r \\
&\Leftrightarrow |x - a| \leqslant +r
\end{aligned}$$