Exercices

Cet exercice est construit autour de la fonction f à variable réelle définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)} \quad \text{si } x \in \mathrm{I} \setminus \{0\} \text{ où I est un sous-ensemble de } \mathbb{R} \end{cases}$$

Partie A : étude d'une fonction

1. Déterminer le plus grand sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ sur lequel f est définie.
2. Montrer que f est continue en 0, dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.
3. Justifier que f est une fonction à dérivée continue sur $[0, 1[$.
4. Dresser le tableau de variation de f après avoir déterminé les limites aux bornes de son ensemble de définition.
5. Montrer que pour tout réel $x \geqslant \mathrm{e}$, on a $0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
6. En déduire que pour tout réel $x \geqslant \mathrm{e}$, on a $0 \leqslant f(x) - \mathrm{e} \leqslant \dfrac{1}{4}(x - \mathrm{e})$.

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\ln(v_n)}$ pour tout n entier naturel.

1. Montrer que la suite (v_n) est bien définie et que pour tout n entier naturel, $v_n \geqslant \mathrm{e}$.
2. Justifier que la suite (v_n) est une suite convergente.
3. La copie d'écran d'un tableur reproduite ci-contre donne les valeurs approchées des premiers termes de la suite (v_n). Quelle formule a-t-on saisie en cellule B3 avant recopie vers le bas pour afficher ces valeurs ?

	A	B
1	n	vn
2	0	3,00000
3	1	2,73072
4	2	2,71831
5	3	2,71828
6	4	2,71828
7	5	2,71828
8	6	2,71828
9	7	2,71828
10	8	2,71828
11		

4. Montrer que, pour tout n entier naturel, $|v_n - \mathrm{e}\,| \leqslant \dfrac{1}{4^n} \times |3 - \mathrm{e}\,| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.
5. Déterminer la limite de la suite (v_n).
6. Résoudre l'inéquation d'inconnue n, $\dfrac{1}{4^n} \leqslant 10^{-12}$, où n est un nombre entier naturel.

7. En utilisant l'étude faite dans cette partie **B**, écrire un algorithme en langage naturel qui permet de déterminer une valeur approchée de e à 10^{-12} près.